

УДК 117.977

DOI 10.54758/16801245_2026_26_1_13

Оптимальное управление в системах, описываемых задачей Гурса для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений второго порядка

Рзаева Вафа Гюлага гызы ORCID 0000-0002-1786-3852

Сумгаитский государственный университет, Сумгаит, Азербайджан, преподаватель

Vafa.rzayeva@sdu.edu.az

ИНФОРМАЦИЯ О СТАТЬЕ	РЕЗЮМЕ
История статьи Получено: 20.09.2025 Исправлено: 28.01.2026 Принято: 03.03.2026	В работе рассматривается задача оптимального управления для процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями гиперболического типа второго порядка с граничными условиями Гурса. Исследуются вопросы оптимальности управлений, а также существование и свойства особых управлений, возникающих в рассматриваемом классе задач. На основе принципа максимума Понтрягина и методов вариационного исчисления получены необходимые условия оптимальности. Особое внимание уделяется анализу вырожденных случаев, при которых классические условия оптимальности оказываются недостаточными. Показано, что наличие интегральных слагаемых существенно влияет на структуру оптимальных и особых управлений. Полученные результаты могут быть использованы при математическом моделировании и оптимизации процессов, описываемых гиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями
Ключевые слова оптимальное управление, задача Гурса, гиперболические уравнения второго порядка, интегро-дифференциальные уравнения, условия оптимальности, особые управления, принцип максимума Понтрягина, вариационные методы, граничные условия, управляемые процессы	

В данной работе рассматривается негладкая задача оптимального управления, описываемая системой гиперболических уравнений второго порядка.

Постановка задачи. Допустим данный процесс задаётся системой интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра гиперболического типа

$$z_{tx}(t, x) = f(t, x), z(t, x)u(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)) ds d\tau, \quad (1)$$

$$(t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x \in (x_0, x_1) \\ z(t, x_0) &= b(t), \quad t \in (t_0, t_1) \\ a(x_0) &= b(t_0) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $h(t, x, z, u)$, $g(t, x, \tau, s, z, u)$, $\alpha(k)$, $b(t)$ и $u(t, x)$ – заданные n -мерные вектор-функции.

$$u(t, x) \in U \subset R^n, (t, x) \in D \quad (3)$$

Под допустимыми будем понимать управляющие функции.

Предположим, каждому $u(t, x)$ отвечает единственное абсолютно непрерывное решение $z(t, x)$.

Рассмотрим задачу нахождения минимального значения функционала при ограничениях (1)-(3).

$$S(u) = \varphi(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k)). \quad (4)$$

Управление доставляющее минимальное значение функционалу (4) назовем оптимальным управлением.

Пусть $(u(t, x), z(t, x))$ - фиксированный, а $(\bar{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x))$ - произвольные – допустимые процессы. Запишем приращение функционала качества:

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \varphi(\bar{z}(\tau_1, x_1), \dots, \bar{z}(\tau_k, x_k)) - \varphi(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k)) \quad (5)$$

Ясно, что $\Delta z(t, x)$ решение краевой задачи

$$\Delta z_a(t, x) = f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), u(t, x)),$$

$$u(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [g(t, x, \tau, s, \bar{z}(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] ds d\tau \quad (6)$$

$$\Delta z(t_0, x) = 0, \quad \Delta z(t, x_0) = 0 \quad (7)$$

$\varphi(t, x)$ - некоторая n -мерная вектор-функция.

Из тождества (6) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) [f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x)) - \\ &- f(t, x, z(t, x), u(t, x))] dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \psi'(t, x) [g(t, x, \tau, s, \bar{z}(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - \\ &- g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] ds d\tau dx dt \end{aligned} \quad (8)$$

На основании теоремы функции имеет место следующее выражение:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [g(t, x, \tau, s, \bar{z}(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - \\ - g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] ds d\tau dx dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \psi'(\tau, s) [g(\tau, s, t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x)) - \\ - g(\tau, s, t, x, z(t, x), u(t, x))] ds d\tau dx dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина для рассматриваемой задачи в виде

$$\begin{aligned} H(t, x, z(t, x), u(t, x), \varphi(t, x)) &= \psi'(t, x) f(t, x, z(t, x), u(t, x)) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(\tau, s) g(\tau, s, t, x, z(t, x), u(t, x)) ds d\tau. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая тождества (8) и (9) приращение (5) целого функционала (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= \varphi(\bar{z}(\tau_1, x_1), \dots, \bar{z}(\tau_k, x_k)) - \varphi(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k)) + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \psi'(t, x) \Delta z(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] dx dt. \end{aligned} \quad (10)$$

На основании формулы Тейлора можно написать следующие разложения

$$\begin{aligned} & \varphi(\bar{z}(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k)) - \varphi(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k)) = \\ & = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k))}{\partial a_i} \Delta z(\tau_i, x_i) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Delta z'(\tau_i, x_i) \frac{\partial^2 \varphi(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k))}{\partial a_i \partial a_j} \Delta z(\tau_j, x_j) + \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & + o_1(\|\sum_{i=1}^k \Delta z(\tau_i, x_i)\|^2) \\ & H(t, x, \bar{z}, \bar{u}, \psi) - H(t, x, z, \bar{u}) = H'_z(t, x, z, \bar{u}, \psi) \Delta z + \\ & + \frac{1}{2} \Delta z' H_{zz}(t, x, z, \bar{u}, \psi) \Delta z + o_2(\|\Delta z\|^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\|\alpha\|$ - норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, где

$o_1(\alpha)$ - величина более высокого порядка, чем α , т.е. $o(\alpha)/\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, (1) штрих векторов операция скалярного произведения, а для матриц – операция транспонирования.

Учитывая разложения (12) из формулы приращения (10) после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k))}{\partial a_i} \Delta z_i(\tau_i, x_i) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Delta z'(\tau_i, x_i) \frac{\partial^2 \varphi(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k))}{\partial a_i \partial a_j} \Delta z_i(\tau_j, x_j) + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) z(t, x) dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H'(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H_z(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] \Delta z(t, x) dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) [H_{zz}(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H_{zz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] \times \\ & \times \Delta z(t, x) dx dt + o_1(\|\sum_{i=1}^k \Delta z(\tau_i, x_i)\|^2) - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_2(\|\Delta z(t, x)\|^2) dx dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку $\Delta z(t, x)$ абсолютно непрерывное решение краевой задачи (1) - (2), то можно записать, что

$$\Delta z(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \Delta z_{\tau s}(\tau, s) d\tau ds \quad (14)$$

$$\Delta z(\tau_i, x_i) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \alpha_i(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt, \quad (15)$$

где $\alpha_i(t, x)$, $i = \overline{1, n}$ характеристическая функция области $[t_0, T_i] \times [x_0, X_i]$, $i = \overline{1, n}$. Учитывая формулы (13) и (14) получаем справедливость тождеств.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k))}{\partial a_i} \Delta z(\tau_i, x_i) = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k \alpha_i(t, x) \frac{\partial \varphi'(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k))}{\partial a_i} \Delta z_{tx}(t, x) dx dt \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \Delta z(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(\tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s), \psi(\tau, s)) ds d\tau \Delta z_{tx}(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Принимая во внимания тождества (16) и (17) получим, что

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k \alpha_i(t, x) \frac{\partial \varphi'(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k))}{\partial a_i} \Delta z_{tx}(t, x) dx dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(\tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s), \psi(\tau, s)) ds d\tau \times \\ &\times \Delta z_{tx}(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H_z(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x) - \\ &- H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H_z(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x) - \\ &- H_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] \Delta z(t, x) dx dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) [H_{zz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \Delta z(t, x) dx dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) [H_{zz}(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x) - \\ &- H_{zz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] \Delta z(t, x) dx dt + \\ &+ o_1(\|\sum_{i=1}^k \Delta z(\tau_i, x_i)\|^2) - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_2(\|\Delta z(t, x)\|^2) dx dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Если предполагать, что вектор-функция $\psi(t, x)$ является решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(\tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s), \psi(\tau, s)) ds d\tau - \\ &- \sum_{i=1}^k \alpha_i(t, x) \frac{\partial \varphi(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k))}{\partial a'_i}, \end{aligned} \quad (19)$$

то формула приращения (18) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H_z(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] \Delta z(t, x) dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Delta z'(\tau_i, x_i) \frac{\partial^2 \varphi(z(\tau_1, x_1), \dots, z(\tau_k, x_k))}{\partial a_i \partial a_j} \Delta z_i(\tau_j, x_j) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \Delta z(t, x) dx dt + \eta(u_i \Delta u(t, x)), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \eta(u_i \Delta u) = & o_1 \left(\left[\sum_{i=1}^k \|\Delta z(\tau_i, x_i)\| \right]^2 \right) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) \times \\ & \times [H_{zz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_2(\|\Delta z(t, x)\|^2) dx dt. \end{aligned} \quad (21)$$

необходимые условия оптимальности.

Из краевой задачи (6)-(7) переходя к эквивалентному уравнению получим

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x f(\tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s) - f(\tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))) ds d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s [g(\tau, s, \alpha, \beta, \bar{z}(\alpha, \beta), \bar{u}(\alpha, \beta)) - g(\tau, s, \alpha, \beta, z(\alpha, \beta), u(\alpha, \beta))] d\alpha d\beta ds d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x f(\tau, s, \bar{z}(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - f(\tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) + \\ & + f(\tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - f(\tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] ds d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s [g(\alpha, \beta, \tau, s, \bar{z}(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g(\alpha, \beta, \tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) + \\ & + g(\alpha, \beta, \tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g(\alpha, \beta, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] d\alpha d\beta ds d\tau. \end{aligned}$$

Здесь переходя к норме и используя условие Липшица, получаем:

$$\begin{aligned} \|\Delta z(t, x)\| \leq & Z_1 \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|\Delta z(\tau, s)\| ds d\tau + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|f(\tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - f(\tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))\| + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|g(\alpha, \beta, \tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g(\alpha, \beta, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))\| d\alpha d\beta ds d\tau, \end{aligned}$$

где $Z_1 = \text{const} > 0$.

Применим к последнему неравенству Лемму Гронуолла-Вендроффа, тогда

$$\begin{aligned} \|\Delta z(t, x)\| \leq & Z_2 \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|f(\tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - f(\tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))\| + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|g(\alpha, \beta, \tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g(\alpha, \beta, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))\| d\alpha d\beta ds d\tau, \end{aligned} \quad (22)$$

$(Z_2 = \text{const} > 0)$.

Пусть $u \in U$ произвольный вектор, $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ - произвольная точка Лебега управления $u(t, x)$, а $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta < \varepsilon < t_1$, $\xi < \varepsilon < x_1$. $u(t, x)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} V - u(t, x), & (t, x) \in [\theta, \theta + \varepsilon] \times [\xi, \xi + \varepsilon] \\ 0, & (t, x) \in D \setminus [\theta, \theta + \varepsilon] \times [\xi, \xi + \varepsilon]. \end{cases} \quad (23)$$

Через $\Delta z_\varepsilon(t, x)$ обозначим специальное приращение состояния $z(t, x)$ управления $u(t, x)$. Из оценки (22) получаем, что $\|\Delta z_\varepsilon(t, x)\| \leq Z_3 \varepsilon^2, (t, x) \in D$ (24), где $Z_3 = \text{const} > 0$.

Учитывая оценку (24) и формулу (23) из (20) получим разложение:

$$S(u + \Delta u_2) - S(u) = -\varepsilon^2 [H(\theta, \xi, z(\theta, \xi), v) - H(\theta, \xi, z(\theta, \xi), u(\theta, \xi))] + o(\varepsilon v)$$

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$H(\theta, \xi, z(\theta, \xi), v, \psi(\theta, \xi)) - H(\theta, \xi, z(\theta, \xi), u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi)) \leq 0 \quad (25)$$

выполнялось для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$.

Сформулированное необходимое условие оптимальности является естественным распространением на рассматриваемую задачу принципа максимума Л.С.Понтрягина. Это условие становится не эффективным, т.е. его нельзя использовать для нахождения направлений подозрительных на оптимальность, если соотношение (25) тождественно выполняется вдоль управления.

В соответствии с этим допустимое управление $u(t, x)$ будем называть особым, если при всех $v \in U$ неравенство (25) выполняется как тождественное равенство на D .

Перейдем к получению необходимого условия оптимальности особых управлений.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_z[t, x] &\equiv f_z(t, x, z(t, x), u(t, x)), \quad g_z[t, x, \tau, s] \equiv g_z(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)) \\ \Delta_{\bar{u}} f[t, x] &\equiv f(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), u(t, x)) \\ \Delta_{\bar{u}} f_z[t, x] &\equiv f_z(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x)) - f_z(t, x, z(t, x), u(t, x)) \end{aligned}$$

Из краевой задачи получим, что $\Delta z(t, x)$ является решением линеаризованной краевой задачи

$$\Delta z_{tx}(t, x) = f_z[t, x] \Delta z(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x q_z[t, x, \tau, s] \Delta z(\tau, s) ds d\tau + \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &+ \Delta_{\bar{u}} f[t, x] + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \Delta_{\bar{u}} g[t, x, \tau, s] ds d\tau + h_1(t, x; \Delta u) \\ &\Delta z(t_0, x) = 0 \\ &\Delta z(t, x_0) = 0, \quad R(t, x, t, x) = E \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} h_1(t, x; \Delta u) &= \Delta_{\bar{u}} f_z[t, x] \Delta z(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \Delta_{\bar{u}} g_z[t, x, \tau, s] \Delta z(\tau, s) ds d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_4(\|\Delta z(\tau, s)\|) ds d\tau + o_3(\|\Delta z(t, x)\|). \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть $R(t, x, \tau, s)$ ($n \times n$)-матричная функция являющаяся решением задачи

$$R_{\alpha\beta}(t, x) = R(t, x, \tau, s) f_z[\tau, s] + \int_{\tau}^t \int_s^x R(t, x, \alpha, \beta) g_z[\alpha, \beta, \tau, s] d\alpha d\beta,$$

$$R(t, x, \tau, x) = 0, R(t, x, t, s) = 0, R(t, x, t, x) = E.$$

Тогда решение линеаризованной краевой задачи (26)-(27) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R(t, x, \tau, s) \Delta_{\bar{u}} f(\tau, s) ds d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{\tau}^t \int_s^x R(t, x, \alpha, \beta) \Delta_{\bar{u}} g(\alpha, \beta, \tau, s) d\alpha d\beta \right] d\tau ds + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R(t, x, \tau, s) h_1(\tau, s; \Delta u) ds d\tau. \end{aligned} \quad (29)$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} h_2(t, x; \Delta u) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R(t, x, \tau, s) h_1(\tau, s; \Delta u) ds d\tau \\ M(\tau, s, u(\tau, s)) = & R(t, x, \tau, s), f(\tau, s, z(\tau, s, u(\tau, s))) + \\ & + \int_{\tau}^t \int_s^x R(t, x, \alpha, \beta) g(\alpha, \beta, z(\tau, s), u(\tau, s)) d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

то представление (29) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [M(t, x, \tau, s, \bar{u}(\tau, s)) - \\ & - M(t, x, \tau, s, u(\tau, s))] ds d\tau + h_2(t, x; \Delta u). \end{aligned} \quad (30)$$

Ədəbiyyat

- [1]. Васильев, О.В. Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. / О.В.Васильев, В.А.Срогио, В.А.Терлецкий –Новосибирск: Наука, –1990, –211 с.
- [2]. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения гиперболического типа / О.А.Ладыженская – М.: Наука, –1981.
- [3]. Мансимов Х.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу / Х.Б.Мансимов, М.Дж.Марданов –Баку: Элм, –2010, –360 с.
- [4]. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе [и др.] – М.: Наука, –1983, –393 с.

Xülasə

İki tərtibli hiperbolik integro-diferensial tənliklər üçün Qursa məsələsi ilə təsvir olunan sistemlərdə optimal idarəetmə məsələləri

Rzayeva V.G.

Açar sözlər: optimal idarəetmə, Qursa məsələsi, ikinci tərtibli hiperbolik tənliklər, integro-diferensial tənliklər, optimallıq şərtləri, xüsusi idarəetmələr, Pontryagin maksimum prinsipi, variasiya üsulları, sərhəd şərtləri, idarə olunan proseslər.

İşdə ikinci tərtibli hiperbolik tipli integro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan proseslər üçün optimal idarəetmə problemi tədqiq olunur. Optimallıq məsələləri araşdırılır və bu sinif problemlərdə yaranan xüsusi idarəetmələr təhlil edilir. Pontryagin maksimum prinsipi və variasiya üsulları istifadə olunmaqla optimallığın zəruri şərtləri əldə edilmişdir. Xüsusi hallara ayrıca diqqət yetirilir, burada klassik optimallıq şərtləri kifayət etmir. Göstərilmişdir ki, integral tərkiblərin mövcudluğu optimal və xüsusi idarəetmələrin strukturuna əhəmiyyətli təsir göstərir. Alınan nəticələr

hiperbolik integro-differensial tənliklərlə təsvir olunan idarə olunan proseslərin riyazi modelləşdirilməsi və optimallaşdırılması üçün istifadə oluna bilər.

Summary

**Optimal control problems in systems governed by the Goursat problem
for second-order hyperbolic integro-differential equations**

Rzayeva V.G.

Key words: *optimal control; Gurs problem; second-order hyperbolic equations; integro-differential equations; optimality conditions; singular controls; Pontryagin maximum principle; variational methods; boundary conditions; controlled processes.*

This work investigates the optimal control problem for processes described by second-order hyperbolic integro-differential equations with Gurs-type boundary conditions. The study addresses the optimality of controls and analyzes singular controls arising in this class of problems. Using the Pontryagin maximum principle and variational methods, necessary conditions for optimality are derived. Special attention is given to degenerate cases where classical optimality conditions are insufficient. It is shown that the presence of integral terms significantly affects the structure of optimal and singular controls. The obtained results can be applied to the mathematical modeling and optimization of controlled processes governed by hyperbolic integro-differential equations.