

Öz-özünə qoşma nüvə tipli operator əmsallı ikinci tərtib diferensial operatorların yüksək tərtibli requlyarlaşmış iz düsturları

Hətəmovə Rəya Fikrət qızı  0000-0001-9082-2769

Sumqayıt Dövlət Universiteti, Sumqayıt, Azərbaycan, müəllim
roya.hetemova@sdu.edu.az

MƏQALƏ HAQQINDA MƏLUMAT	XÜLASƏ
Məqalənin tarixçəsi Daxilolma tarixi: 23.09.2025 Düzəliş tarixi: 22.12.2025 Qəbul olunma tarixi: 03.02.2026	<i>Bu məqalədə son intervalda nüvə öz-özünə birləşən əmsalları olan ikinci dərəcəli diferensial operator tənlikləri nəzərdən keçirilir. Bəzi şərtlər yerinə yetirildikdə, bu operatorun spektri bu tənliyin əmsalları üçün araşdırılır, bu spektrin quruluşu müəyyənləşdirilir. Bu operatorun qətnamə teoremləri sübut edilmişdir. Daha yüksək sıfarişli operatorların nizamlı izi üçün asimptotik düsturlar alırıq</i>
Açar sözlər Hilbert fəzası, operator, operator-diferensial tənlik, sərhəd şərtləri, məxsusi ədədlər, məxsusi vektorlar, öz-özünə qoşma operator, nüvə tipli operator, rezolventa, spektr, requlyarlaşmış iz	

Tədqiq olunmuş məqalədə sonlu parçada öz-özünə qoşma nüvə tipli operator əmsallı üçün ikinci tərtib diferensial tənliklərin yüksək tərtibli requlyarlaşmış iz düsturu alınmışdır. Baxılan məsələnin məxsus ədədlərinin quruluşa və bəzi spektral xassələr [1] məqaləsində araşdırılmışdır.

Qeyd edək ki, diferensial operatorların requlyarlaşmış iz düsturu ilk dəfə İ.Q. Qelfand və B.M. Levitan tərəfindən sonlu parçada Şturm-Liuvill tənliyi üçün alınmışdır [2]. Bəzi diferensial operatorlar üçün requlyarlaşmış iz düsturları L.A. Dikiy tərəfindən tədqiqi olunmuşdur [3].

Bu istiqamətdə M.G. Qasimov və B.M. Levitan [4], V.A. Sadovnicıy [6] və [5], V.A. Sadovnicıy [6] qiymətli tədqiqatlar vardır.

İlk dəfə R.Z. Xəlilova tərəfindən ikinci tərtib operator əmsallı diferensial tənliklər üçün requlyarlaşmış iz düsturu isbat olunmuşdur [7]. Bu istiqamətdə operator əmsallı diferensial tənliklər üçün E. Abdulkadırov [8], M. Bayramoğlu [9], Ə.A. Adıgözəlov [10], F.Q. Maksudov, M. Bayramoğlu, Ə.A. Adıgözəlov [11], N.M. Aslanova [12], H.İ. Aslanov və K.G. Bədəlova [13] Albayrak İ., Köklük, Bayramov A.M. [14] tərəfindən iz düsturları tədqiq olunmuşdur.

Tutaq ki, H separabel Hilbert fəzasıdır.

$H_1 = L_2([0,1]; H)$ fəzasında

$$l(y) = -y''(x) + Q(x)y, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

diferensial ifadəsi və

$$y(0) = 0, \quad y'(1) + ay(1) = 0, \quad a > 0 \quad (2)$$

sərhəd şərtləri ilə L operatoru təyin edək. Burada $Q(x)$ operator-funksiyası istənilən $x \in [0,1]$ üçün H Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma nüvə tipli operator olduğu fərz olunur. Əlavə olaraq $Q(x)$ operator-funksiyasının aşağıda göstərilən şərtləri də ödədiyini fərz edirik:

1. $Q(x)$ operator-funksiyasının $(0,1)$ intervalında $2k$ tərtibli zəif törəmələri vardır və istənilən $x \in [0,1]$ üçün $Q_{(x)}^{(l)} (l = 0, 1, 2 \dots 2k)$ operatorlar H fəzasında öz-özünə qoşma nüvə tipli operatorlardır.

2. İstənilən $x \in [0,1]$ üçün $\|Q(x)\|_H < \frac{1}{2} \min_m (\mu_{m+1} - \mu_m)$ burada $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m < \dots \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + a \sin \sqrt{\lambda} = 0$ tənliyinin müsbət kökləridir.

3. H -fəzasında elə ortonormal $\{\varphi_n\}$ bazisi var ki,

$$\sum_{n=1}^n \|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} < \infty$$

4. İstənilən $f \in H$ və $\kappa \geq 2$ üçün $\int_0^1 (Q^{(2k-1)}(x)f, f)_H dx = 0$

5. $l = 0, 1, \dots, 2k$ üçün $\|Q_{(x)}^{(l)}\|_{\sigma_1(H)}$ funksiyaları $[0,1]$ parçasında ölçülən, məhdud funksiyalardır. Burada $\sigma_1(H)$ -H Hilbert fəzasında təsir edən bütün nüvə tipli operatorlar fəzasıdır.

6. $[0,1]$ parçasının üç nöqtələrində $Q_{(0)}^{2j-1} = 0$, ($j=1,2, \dots k-1$) və $Q^{(j)}(1) = 0$, ($j = 0,1, \dots k$) şərtləri ödənilir.

L_0 ilə $l_0(y) = -y''(x)$ diferensial ifadəsi və (2) sərhəd şərtləri ilə təyin olunmuş operatoru işarə edək.

L_0 operatorunun spektri $\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + a \sin \sqrt{\lambda} = 0$ tənliyinin müsbət köklərindən ibarət olan $\{\mu_m\}_{m=1}^\infty$ $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m < \dots$, çoxluğudur. Tənliyin hər bir kökü sonsuz tərtibli məxsusi ədəddir. μ_m məxsusi ədədinə uyğun ortonormal məxsusi vektor-funksiyalar

$$\psi_{mn}^{(0)}(x) = \alpha_m S m \sqrt{\mu_m} x \cdot \varphi_n, n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

şəklindədir. Burada

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+a^{-1} \cos^3 \sqrt{\mu}}} \quad (4)$$

Qeyd edək ki, L_0 operatorunun μ_m -lərdən fərqli məxsusi ədədi yoxdur. Doğrudan da, əgər L_0 operatorunun μ_m -lərdən fərqli $\mu \in \{\mu_m\}_{m=1}^\infty$ məxsusi ədədi və uyğun $y(x)$ məxsusi funksiyası olarsa, bu halda L_0 operatoru öz-özünə qoşma operator olduğundan $y(x)$ funksiyası $\{\alpha_m S m \sqrt{\mu_n} x \cdot \varphi_n\}_{m=1, n=1}^\infty$ sisteminin bütün elementlərinə ortoqonal olardı. Bu sistem isə tam sistem olduğundan $y(x)=0$ olardı. Bu sistem isə tam sistem olduğundan $y(x)=0$ olardı. Bu isə $y(x)$ -in məxsusi funksiya olmasına ziddir. Bu zidiyyət $\lambda \in \{\mu_m\}_{m=1}^\infty$ olduğunu göstərir. Deməli, məxsusi vektor-funksiyalar yalnız (3) şəklində elementlərdir.

L operatorunun spektrinin quruluşu haqqında [1] məqaləsində isbat olunmuşdur ki, L operatorunun spektri

$$\Omega_m = [\mu_m - \|Q(x)\|_{H_1}, \mu_m + \|Q(x)\|_{H_1}], m = 1, 2, \dots$$

parçalarının birləşməsindən ibarət çoxluğun alt çoxluğudur, belə ki, a) L operatorunun Ω_m parçasına daxil olan və μ_m -dən fərqli olan hər bir spektr nöqtəsi sonlu tərtibə malik olan izdə edilmiş məxsusi ədəddir; b) μ_m nöqtələri L operatorunun sonlu və ya sonsuz tərtibə malik olan məxsusi ədədi ola bilər;

c) $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^\infty$ ilə L operatorunun Ω_m parçasına daxil olan məxsusi ədədlərini işarə etsək, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{mn} = \mu_m$ münasibəti doğrudur.

$\{\psi_{mn}\}_{m=1, n=1}^\infty$ ilə L operatorunun $\{\lambda_{mn}\}_{m=1, n=1}^\infty$ məxsusi ədədlərinə uyğun ortonormal məxsusi vektor-funksiyalar sistemini işarə edək.

Tutaq ki, $b_p = \left\{ \lambda : |\lambda| = \frac{1}{2} \min_m (\mu_{p+1} - \mu_p) \right\}$

$$B_{mn}^0 = (\cdot, \psi_{mn}^0)_{H_1} \psi_{mn}^0, B_{mn} = (\cdot, \psi_{mn})_{H_1} \psi_{mn}$$

Bu halda

$$R_{\lambda}^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}^0(x)}{\mu_m - \lambda} \quad (5)$$

$$R_{\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}(x)}{\lambda_{mn} - \lambda} \quad (6)$$

$$R_{\lambda} - R_{\lambda}^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}(x)}{\lambda_{mn} - \lambda} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}^0(x)}{\mu_m - \lambda} \quad (7)$$

İsbat olunmuşdur ki, əgər λ ədədi L_0 və L operatorlarının requlyar nöqtəsi isə, onda $R_{\lambda} - R_{\lambda}^0$ operator H_1 fəzasında nüvə tipli operatorudur, yəni $(R_{\lambda} - R_{\lambda}^0) \leftarrow \sigma_1(H_1)$.

Eyni zamanda $R_{\lambda} - R_{\lambda}^0$ operatoru $\rho(\lambda)$ rezolvent çoxluğunda $\sigma_1(H)$ fəzasının normasına nəzərən analitik funksiyadır, yəni

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{np} - \mu_p| < \infty, \quad \rho = 1, 2, \dots \quad (8)$$

sıralar mütləq yığılandır.

İndi isə requlyarlaşmış iz düsturunun alınması üçün vacib olan bəzi münasibətləri göstərək. Qeyd etdik ki, $\lambda \in \rho(\lambda)$ olduqda $(R_{\lambda} - R_{\lambda}^0) \in \sigma_1(H_1)$. Onda (5), (6), (7) bərabərliklərdən

$$\text{tr}(R_{\lambda} - R_{\lambda}^0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{\mu_m - \lambda} \right) \quad (9)$$

olduğunu alırıq.

Bu bərabərliyin hər tərəfinin $\frac{\lambda^k}{2\pi i}$ -yə vurub alınmış ifadəni $|\lambda| = b_p = \frac{1}{2}(\mu_{p+1} - \mu_p)$ çevrəsi üzrə inteqrallaşsaq alırıq:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^k \text{tr}(R_{\lambda} - R_{\lambda}^0) d\lambda = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_m^k - \lambda_{mn}^k) \quad (10)$$

Əgər $R_{\lambda} = R_{\lambda}^0 - R_{\lambda} Q(x) R_{\lambda}^0$ bərabərliyini nəzərə alsaq aşağıdakı münasibətin doğru olduğunu alırıq:

$$R_{\lambda} - R_{\lambda}^0 = \sum_{j=1}^N (-1)^j R_{\lambda}^0 (Q R_{\lambda}^0)^j + (-1)^{j+1} R_{\lambda} (Q R_{\lambda}^0)^{N+1} \quad (11)$$

burada N istənilən natural ədəddir.

$R_{\lambda}^0 (Q R_{\lambda}^0)^j$ ($j = 1, 2, \dots$) və $R_{\lambda} (Q R_{\lambda}^0)^{N+1}$ operatorlarının H_1 fəzasında nüvə tipli operatorlar olduğunu nəzərə alsaq, (10) və (11) bərabərliklərindən alırıq:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^k - \mu_m^k) = \sum_{j=1}^N M_p^j + \frac{(-1)^N}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^k [R_{\lambda} (Q R_{\lambda}^0)^{N+1}] d\lambda \quad (12)$$

burada

$$M_p^j = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^k \text{tr} [(Q R_{\lambda}^0)^j] d\lambda \quad (13)$$

Sonuncu ifadəni müəyyən çevirmələr aparmaqla aşağıdakı şəkildə gətirmək olar:

$$M_p^j = \frac{(-1)^j \cdot k}{2\pi i \cdot j} \int_{|\lambda|=bp} \lambda^{k-1} \text{tr}[QR_\lambda^0] d\lambda \quad (14)$$

(1)-6) şərtlərindən istifadə etməklə aşağıdakı mühüm teorem isbat olunmuşdur:

Teorem 1. Əgər $Q(x)$ operator-funksiyası 1)-6) şərtlərini ödəyərsə, onda aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M_p^j = 0, \quad j \geq 2k + 2 \quad (15)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{|\lambda|=bp} \lambda^k \text{tr}[R_\lambda(QR_\lambda^0)^{N+1}] d\lambda = 0, \quad N \geq 2k + 2 \quad (16)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M_p^1 = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \cdot k \cdot [\text{tr}Q^{(2k-2)}(1) - \text{tr}Q^{(2k-2)}(0)] \quad (17)$$

Əgər (10), (12) bərabərliklərindən və Teorem 1-dən istifadə etsək, əsas nəticə olaraq aşağıdakı teoremi alırıq:

Teorem 2. Əgər $Q(x)$ operator funksiyası 1) - 6) şərtlərini ödəyirsə, onda aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^k - \mu_m^k) - k \cdot \sum_{j=2}^{2k+1} \frac{1}{j} (-1)^j \text{Res}_{\lambda=\mu_m} [\lambda^{k-1} \text{tr}(QR_\lambda^0)^j] \right\} = \frac{(-1)^k \cdot k}{4^k} [\text{tr}Q_{(1)}^{(2k-2)} - \text{tr}Q_0^{(2k-2)}] \quad (18)$$

Bu bərabərliyin sol tərəfindəki sıraya L operatorunun K tərtibli regulyarlaşmış izi deyilir. (18) düsturu isə L operatorunun K tərtibli regulyarlaşmış iz düsturu deyil.

Ədəbiyyat

- [1]. Hətəmov, R.F. Hilbert fəzasında ikinci tərtib operator-diferensial tənlik üçün sonlu parçada bəzi sərhəd məsələsinin mövcudluq və yeganəliyinin tədqiqi // Journal of Baku Engineering University, Mathematics and Computer Science, –2022, Vol. 6, N 3, –pp. 92–96.
- [2]. Гельфанд, И.М. Об одном простом множестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка / И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан. ДАН СССР, –1953, т. 88, №5, –с. 593–596.
- [3]. Дикси, Л.И. Об одном уравнении Гельфанда–Левитана // Докл. Акад. наук, –1953, т. 88, вып. 2, –с. 119–123.
- [4]. Гасымов, М.Г. О спектральном разложении функций в ряду сингулярных операторов Шмидта–Любища / М.Г.Гасымов, Б.М.Левитан. ДАН СССР, –1963, т. 151, №5, –с.1014–1017.
- [5]. Садовничий, В.А., Дубровский В.В. Об одном классе операторов, задаваемых симметричными данными и условиях абстрактного уравнения / В.А.Садовничий, В.В.Дубровский. Дифференц. уравнения, –1974, т. 173, №7, –с. 1264–1271.
- [6]. Садовничий, В.А. О спектральном разложении функций дифференциальных операторов высшего порядка // Дифференц. уравнения, –1966, т. 2, №12, –с. 1611–1624.
- [7]. Нəсəпova, Р.Ə. О регуляризации следа для операторного уравнения Шмидта–Любища // Функц. анализ, теория функций и их прил., Мехатклас, –1976, вып. 3, т. 1, –с. 154–161.
- [8]. Абдукаримов, Е. Формулы следа для регуляризованных систем дифф. // Вестник Московского Университета, Серия матем. и механики, –1967, №2, –с.17–24.
- [9]. Вауғaтoв, М. Высшие следы для абстрактного уравнения Шмидта–Любища // АН АЗССР, Ин-т физики, –Баку,–1986, 34 с. Препринт АН Азерб. ССР, Инст. физики, №6.

- [10]. Адыгезалов, А.А. О следе разности двух дифференциальных уравнений операторов Штурма-Лиувилля с операторными коэффициентами // Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, –1976, №3, –с.20–24.
- [11]. Максудов, Ф.Г. О регуляризованном следе операторов Штурма-Лиувилля на конечном отрезке с неограниченными операторными коэффициентами / Ф.Г.Максудов, М.Байрамоглу, А.А.Адыгезалов // Доклады АН СССР, –1984, т.277, №4, –с.795–799.
- [12]. Асланова Н.М. A trace formula of a boundary value problem for Sturm–Liouville operator // Sib. math. journal, –2008, vol. 40, №6, –pp.1207–1215 (Russian).
- [13]. Badalova, Konul H. On the spectrum and regularized trace of Sturm–Liouville operator equation given on a finite interval // Trans. of NAS of Azerbaijan, –2012, vol. XXXII, № 4, – pp. 29–34.
- [14]. Albayrak, I. A regularized trace formula for differential equations with trace nuclear class operator coefficients / I.Albayrak, K.Köklü, A.Bayramov // Rocky Mountain J. Math., –2010, vol. 40, №4, –pp. 1095–1110.

Summary

The high order regularized trace formulas for second order differential equation with self-adjoint nuclear class operator coefficients

Khatamova R.F.

Keywords: Hilbert space, operator, operator-differential equation, boundary condition, eigenvalue, eigenfunction, spectrum, self-adjoint operator, nuclear type operator, resolvent, regularized trace.

In this paper the second order differential-operator equations with nuclear self-adjoint coefficients are considered on the final interval. With some conditions on coefficients of this equation the spectrum of this operator is researched, the structure of this spectrum is defined. The theorems of resolvent of this operator are proved. We get asymptotic formulas for regularized trace of the highest order operators.

Резюме

Формулы регуляризованного следа высокого порядка для дифференциального уравнения второго порядка с ядерными операторными коэффициентами

Гатамова Р.Ф.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, оператор, операторно-дифференциальное уравнение, граничные условия, собственные значения, спектр, собственные операторные функции, самосопряжённый оператор, ядерные операторы, резольвента, регуляризованный след.

В работе на конечном отрезке рассматриваются операторно-дифференциальные уравнения второго порядка с ядерными самосопряжёнными коэффициентами. При некоторых условиях на коэффициенты основного уравнения исследуется спектр данного оператора, определяется структура этого спектра. Вводятся и доказываются теоремы о резольвенте данного оператора. Поддаются асимптотические формулы для регуляризованного следа порядка данного оператора.