

Kəsilmə şərtinə malik olan Dirak sisteminin xüsusi həlli haqqında**Allahverdiyeva Natavan Əhmədəli qızı** ^{ORCID 0000-0002-5600-2385}*Sumqayıt Dövlət Universiteti, Sumqayıt, Azərbaycan, dosent*
natavanallahverdiyeva@sdu.edu.az

MƏQALƏ HAQQINDA MƏLUMAT	XÜLASƏ
Məqalənin tarixçəsi Daxilolma tarixi: 20.10.2025 Düzəliş tarixi: 28.01.2026 Qəbul olunma tarixi: 06.02.2026	<i>Interval daxilində N sayda kəsilmə şərti olan kanonik şəkildə birölçülü Dirak tənlikləri sisteminə baxılmışdır. Kəsilmə şərtləri daxilində həm həyəcanlanmamış Dirak tənlikləri sisteminin, həm də həyəcanlanmış Dirak tənlikləri sisteminin Yost tipli həlləri öyrənilir. Həyəcanlanmamış sistemin, yəni Pauli operatorunun doğurduğu tənliklər sisteminin Yost tipli həllinin aşkar göstərilişi tapılmışdır. Belə ki, kəsilmə nöqtələrinin doğurduğu hər bir intervalda həllin analitik ifadəsi alınmışdır. Dirak tənlikləri sisteminin Yost həllinin ödədiyi integral tənlik tapılmışdır</i>
Açar sözlər Dirak sistemi, Pauli matrisi, kəsilmə şərti, Yost həlli, integral tənlik	

Giriş

Aşağıdakı tənliklər sisteminə baxaq:

$$By' + \Omega(x)y = \lambda y, 0 < x < \infty, \quad (1)$$

burada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Pauli tipli matrisidir,

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

 λ – spektral parametr, $p(x), q(x)$ – isə kompleks qiymətli funksiyalar, $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ – axtarılanhəlldir və müəyyən $a_j \in (0, \infty), a_j < a_{j+1}, j = 1, \dots, N-1, N \geq 2$ nöqtələrində

$$y(a_j - 0) = M_j y(a_j + 0), j = 1, \dots, N \quad (2)$$

kəsilmə şərtlərini ödəyir. M_j matrisləri $M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & 0 \\ \beta_j & \alpha_j^{-1} \end{pmatrix}$, düsturları ilə təyin olunur belə ki, $\alpha_j \neq 0, \beta_j, j = 1, N$ həqiqi ədədlərdir.

Təqdim olunan məqəədə (1)-(2) məsələsində $\Omega(x) \equiv 0$ olduqda həllin aşkar ifadəsi tapılmışdır. (1)-(2) məsələsinin Yost tipli həllinin ödədiyi integral tənlik tapılmışdır. Alınan nəticələr (1)-(2) məsələsi üçün müxtəlif spektral məsələlərin öyrənilməsində istifadə oluna bilər. Qeyd edək ki, kəsilmə şərti olmadıqda və ya bir kəsilmə şərti olduqda oxşar məsələlər [1]-[4] işlərində baxılmışdır.

Həyəcanlanmamış sistemin Yost həlli

Əvvəlcə həyəcanlanmamış tənliklər sisteminə baxaq:

$$By' = \lambda y \quad (3)$$

Məlum olduğu kimi (3) sisteminin

$$y = e^{-\lambda Bx}, \quad (4)$$

matris-funksiyası şəklində həlli var.

İndi isə (3) tənliklər sisteminin (2) şərtlərini ödəyən həllini quraq. Bu həlli

$$E_0(x, \lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda Bx}, & x > a_N \\ e^{-\lambda Bx} C_N, & a_{N-1} < x < a_N \end{cases}$$

burada C_N - məchul matrisdir. (2) şərtindən alırıq ki,

$$e^{-\lambda B a_N} C_N = M_N e^{-\lambda B a_N},$$

bərabərliyi ödənilir. Buradan isə alırıq:

$$C_N = e^{\lambda B a_N} M_N e^{-\lambda B a_N}.$$

Aşağıdakı matrisləri daxil edək:

$$M_N^{\pm} = \frac{1}{2}(M_N \pm B M_N B) \quad (5)$$

$B^2 = -I$, burada I vahid matrisdir, aşağıdakı münasibətləri tapırıq:

$$B M_N^+ = \frac{1}{2} B (M_N + B M_N B) = \frac{1}{2} (B M_N - M_N B)$$

$$M_N^+ B = \frac{1}{2} (M_N + B M_N B) B = \frac{1}{2} (M_N B - B M_N)$$

Deməli,

$$B M_N^+ = -M_N^+ B$$

bərabərliyi doğrudur. Eyni qayda ilə alırıq ki,

$$B M_N^- = M_N^- B.$$

Bərabərliyi doğrudur. Riyazi induksiya metodundan istifadə edərək isbat etmək olar ki,

$$B^n M_N^+ = (-1)^n M_N^+ B^n, \quad B^n M_N^- = M_N^- B^n$$

münasibətləri ödənilir. Buna görə də

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda Bx} M_N^+ &= M_N^+ e^{\lambda Bx} \\ e^{-\lambda Bx} M_N^- &= M_N^- e^{-\lambda Bx} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

münasibətləri ödənilir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$M_N = M_N^+ + M_N^-$$

münasibəti ödənilir. Buna görə də alırıq:

$$\begin{aligned} C_N &= e^{\lambda B a_N} M_N e^{-\lambda B a_N} = e^{\lambda B a_N} (M_N^+ + M_N^-) e^{-\lambda B a_N} = \\ &= e^{\lambda B a_N} M_N^+ e^{-\lambda B a_N} + e^{\lambda B a_N} M_N^- e^{-\lambda B a_N} = M_N^+ e^{-\lambda B a_N} e^{\lambda B a_N} + \\ &+ e^{\lambda B a_N} e^{-\lambda B a_N} M_N^- = M_N^+ + M_N^-. \end{aligned}$$

Beləliklə alırıq ki, (1)-(2) məsələsi $\Omega(x) \equiv 0$ olduqda (a_{N-1}, ∞) aralığında

$$E_0(x, \lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda Bx}, & x > a_N \\ M_N^- e^{-\lambda Bx} + M_N^+ e^{-\lambda(2a_N - x)B}, & a_{N-1} < x < a_N \end{cases}$$

şəklində xüsusi həllə malikdir. İndi isə bu həlli (a_{N-2}, a_N) aralığına elə davam etdirək ki, həmin həll (1) tənliyini və

$$y(a_{N-1} - 0) = M_{N-1} y(a_N + 0)$$

şərtini ödəsin. Həlli (a_{N-2}, a_{N-1}) aralığında $e^{-\lambda Bx} C_{N-1}$ şəklində axtarsaq və kəsilmə şərtini nəzərə alsaq aşağıdakı münasibət alınır:

$$M_{N-1} (M_N^- e^{-\lambda B a_{N-1}} + M_N^+ e^{-\lambda B(2a_N - a_{N-1})}) = e^{-\lambda B a_{N-1}} C_{N-1}.$$

Əgər

$$M_{N-1}^{\pm} = \frac{1}{2}(M_{N-1} \pm BM_{N-1}B)$$

matrislərini daxil etsək və

$$M_{N-1} = M_{N-1}^{+} + M_{N-1}^{-}$$

eyniliyini nəzərə alsaq sonuncu bərabərlikdən tapırıq:

$$\begin{aligned} C_{N-1} &= e^{\lambda Ba_{N-1}} (M_{N-1}^{+} + M_{N-1}^{-}) (M_N^{-} e^{-\lambda a_{N-1} B} + M_N^{+} e^{-\lambda(2a_N - a_{N-1})B}) = \\ &= e^{\lambda Ba_{N-1}} (M_{N-1}^{-} + M_{N-1}^{+}) e^{-\lambda a_{N-1} B} (M_N^{-} + M_N^{+} e^{-2\lambda a_N B}) = \\ &= (M_{N-1}^{-} + M_{N-1}^{+} e^{-2\lambda a_{N-1} B}) (M_N^{-} + M_N^{+} e^{-2\lambda a_N B}) \end{aligned}$$

Bu münasibətlərdən alırıq ki, (1)-(2) məsələsi $\Omega(x) \equiv 0$ olduqda $(a_{N-2}, +\infty)$ aralığında

$$E_0(x, \lambda) = \begin{cases} (M_{N-1}^{-} e^{-\lambda Bx} + M_{N-1}^{+} e^{-\lambda(2a_{N-1}-x)B}) (M_N^{-} + M_N^{+} e^{-\lambda a_N B}), & a_{N-2} < x < a_{N-1} \\ M_N^{-} e^{-\lambda Bx} + M_N^{+} e^{-\lambda(2a_N-x)B}, & a_{N-1} < x < a_N \\ e^{-\lambda Bx}, & x > a_N \end{cases}$$

şəklində xüsusi həllə malikdir. Prosesi bu cür davam etdirsək induksiya metodu ilə alırıq ki, (1)-(2) məsələsinin $\Omega(x) \equiv 0$ olduqda (a_{j-2}, a_{j-1}) intervalında həlli

$$\begin{aligned} &(M_{j-1}^{-} e^{-\lambda Bx} + M_{j-1}^{+} e^{-\lambda(2a_{j-1}-x)B}) (M_j^{-} + M_j^{+} e^{-\lambda a_j B}) \times \\ &\times (M_{j+1}^{-} + M_{j+1}^{+} e^{-\lambda a_N B}) \dots (M_N^{-} + M_N^{+} e^{-\lambda a_N B}) \end{aligned}$$

şəklindədir. Bu mühakimələrdən aşağıdakı teoremin doğruluğunu alırıq:

Teorem. $\Omega(x) \equiv 0$ olduqda (1)-(2) məsələsinin $(0, +\infty)$ intervalında həlli

$$E_0(x, \lambda) = \begin{cases} (M_{j-1}^{-} e^{-\lambda Bx} + M_{j-1}^{+} e^{-\lambda(2a_{j-1}-x)B}) (M_j^{-} + M_j^{+} e^{-\lambda a_j B}) \times \\ \times \dots (M_N^{-} + M_N^{+} e^{-\lambda a_N B}), & a_{j-2} < x < a_{j-1}, j = 2, \dots, N-1, a_0 = 0 \\ M_N^{-} e^{-\lambda Bx} + M_N^{+} e^{-\lambda(2a_N-x)B}, & a_{N-1} < x < a_N \\ e^{-\lambda Bx}, & x > a_N \end{cases} \quad (7)$$

şəklində göstərilə bilən xüsusi həlli var.

Həyəcanlanmış sistemin Yost həlli

İndi (1) tənliyinə baxaq. Bu tənliyin elə $E(x, \lambda)$ həllini axtaraq ki, λ parametrinin hər bir həqiqi qiyməti üçün

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x, \lambda) e^{\lambda Bx} = I \quad (8)$$

şərti ödənilsin. Bu cür həllə Yost həlli deyəcəyik.

(1) tənliyini

$$By' - \lambda y = -\Omega(x)y \quad (9)$$

şəklində yazaq və sabitlərin variasiyası üsulunu tətbiq edək. (1) tənliyinin həllini

$$y(x, \lambda) = E(x, \lambda)C(x, \lambda) \quad (10)$$

şəklində axtaraq. (10) göstərilişini (9) tənliyində yazsaq alırıq

$$BE_0(x, \lambda)C'(x, \lambda) = -\Omega(x)y(x, \lambda),$$

Buradan isə

$$C'(x, \lambda) = E_0^{-1}(x, \lambda)B\Omega(x)y(x, \lambda),$$

münasibəti alınır, belə ki, $B^{-1} = -B$ olduğunu nəzərə aldıq. Axırncı bərabərlikdən tapırıq:

$$C(x, \lambda) = C_0 - \int_x^{+\infty} E_0^{-1}(t, \lambda)B\Omega(t)y(t, \lambda)dt$$

Bu bərabərliyi (10)-da nəzərə alsaq

$$y(x, \lambda) = E_0(x, \lambda)C_0 - \int_x^{+\infty} E_0(x, \lambda)E_0^{-1}(t, \lambda)B\Omega(t)y(t, \lambda)dt$$

tənliyi alınar. (8) şərtinə əsasən $C_0 = I$ olduğunu alırıq.

Beləliklə, (1) tənliyinin Yost həlli

$$E(x, \lambda) = E_0(x, \lambda) - \int_x^{+\infty} E_0(x, \lambda)E_0^{-1}(t, \lambda)B\Omega(t)E(t, \lambda)dt, \quad (11)$$

inteqral tənliyini ödəyir, burada $E_0(x, \lambda)$ funksiyası (7) düsturu ilə təyin olunur. Digər tərəfdən, (11) inteqral tənliyinin həlli (1), (2), (3) məsələsinin Yost həllidir. Doğrudan da (11) tənliyindən törəmə alsaq, $E(x, \lambda)$ matris-funksiyasının (1), (2), (3) məsələsinin həlli olduğunu alırıq.

Ədəbiyyat

- [1]. Гасымов, М.Г. Определение системы Дирака по фазе рассеяния / М.Г.Гасымов, Б.М.Левитан // Докл. АН СССР, –1966, т.167, –№6, –с.1219-1222.
- [2]. Gasymov, M.G. An inverse problem of scattering theory for a system of Dirac equations of order $2n$ / Trudy Moskov. Mat. Obsh., 19, –1968, –p.41-112. (in Russian).
- [3]. Huseynov, H.M. An inverse scattering problem for a system of Dirac equations with discontinuity conditions // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. Volume 40, Special Issue, –2014, –p. 215–225.
- [4]. Гусейнов, И.М. Задача рассеяния для системы Дирака с разрывным граничным условием / И.М.Гусейнов, Г.С.Рагимова, Ханмамедов Аг.Х // Journal of Contemporary Applied Mathematics, –2014, vol.4, no.1, –p.42-47.

Summary

On a special solution of the Dirac system with a discontinuous condition

Allakhverdiyeva N.A.

Keywords: Dirac system, Pauli matrix, discontinuity condition, Jost solution, integral equation

A one-dimensional Dirac system in canonical form with N discontinuous points inside the interval is considered. In the presence of discontinuous conditions, the Jost-type solution is studied both for the unperturbed system of Dirac equations and for the perturbed system of Dirac equations. An explicit representation of the Jost type solution for the unperturbed system, i.e. for the system generated by the Pauli matrix, is found. Moreover, an analytical expression for the solution was found in each interval formed by the discontinuity points. An integral equation was obtained that satisfies a Jost-type solution.

Резюме

Об особом решении системы Дирака с разрывным условием

Аллахвердиева Н.А.

Ключевые слова: система Дирака, матрица Паули, условие разрыва, решение Йоста, интегральное уравнение

Рассмотрена одномерная система Дирака в канонической форме с N разрывными точками внутри интервала. При наличии разрывных условий изучается решение типа Йоста так для невозмущенной системы уравнений Дирака, как и для возмущенной системы уравнений Дирака. Найдено явное представление решения типа Йоста для невозмущенной системы, т.е. для системы порожденной матрицей Паули. При этом в каждом интервале, образуемом точками разрыва, найдено аналитическое выражение решения. Получено интегральное уравнение, которому удовлетворяет решение типа Йоста.